ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הגדרה:  
 ט.ל.  נקרא וקטור עצמי של  אם יש סקלר  כך ש-.  
 נקרא הערך העצמי השייך ל-.  
 נקרא הוקטור העצמי השייך ל-.

הגדרה:  
 מטריצה מסדר  מעל שדה ,  נקרא וקטור עצמי של  אם .  
 נקרא הערך העצמי השייך ל-.

כל ההגדרות והמשפטים בקשר ללכסינות של מטריצה

הגדרה:  
נתונה , אם היא דומה למטריצה אלכסונית, אז היא לכסינה.

* מזה דומה למטריצה אלכסונית?  
  קיימת  הפיכה כך ש-.

משפט:  
 לכסינה אם קיים ל- (מ.ו. כנראה) בסיס שכולו מורכב מוקטורים עצמיים.

כלומר אם יש בסיס  אז המטריצה המייצגת של הטרנספורמציה נראית כך: .

משפט:  
 לכסינה אם יש לה  ו.ע. בת"ל.

משפט:  
 לכסינה אם יש לה  ע.ע. שונים.

משפט:  
 לכיסנה אמ"מ עבור כל ע"ע הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.

משפט:  
 ט.ל. אזי:  
 הדטרמיננטה של אחת המטריצות המייצגות = .

משפט:  
 ט.ל. אזי:

1. הערכים העצמיים של  הם פתרונות המשוואה  (אני: כלומר פתרונות של הפולינום האופייני).
2. הוקטורים העצמיים של ערך עצמי  הם האיברים השונים מ-0 ב- .
3. אוסף הוקטורים העצמיים השייכים לערך עצמי של  בתוספת ה-0  הוא תת מרחב של .

הערה: בע"מ 74 כתבתי הערות שלי למשפט הנ"ל, אפשר לקרוא אותן , הן מבהירות.

סימונים:

1.  - הפולינום האופייני של .
2.  - אוסף הוקטורים העצמיים השייכים לערך עצמי של  בתוספת ה-0, נקרא המרחב העצמי של .

משפט:  
ל-ע.ע. שונים יש ו.ע. בת"ל.

הערה:  
ו.ע. תמיד שונה מאפס.

משפט:  
 ט.ל., . אם הפולינום האופייני של  מתפרק לגורמים לינאריים שונים (כלומר יש לו  שורשים שונים), אזי  לכסינה.

משפט (חשוב מאוד):  
 מטריצה לכסינה.   
 ו.ע. בת"ל.  
 ע.ע. מתאימים.  
נסמן: אזי: .  
משמעות:   
המטריצה ההפיכה , שהיא מטריצת מעבר, מורכבת מהעמודות של הוקטורים העצמיים.

הערה:  
כמות הוקטורים העצמיים עבור ערך עצמי מסוים היא ככמות דרגות החופש במערכת ההומוגנית.

משפט:  
למטריצות דומות יש אותו פ.א. ולכן גם אותם ע.ע.

הגדרה – ריבוי אלגברי:  
 ע.ע. הריבוי האלגברי של  הוא הריבוי של  בפ.א.  
  
הגדרה – ריבוי גיאומטרי:  
 ע.ע. הריבוי הגיאומטרי של  הוא מספר הו.ע. הבת"ל של .

משפט:  
 ט.ל.,  ע.ע. של .   
ר.ג. של  ר.א. של .

מסקנה:  
 לכסינה אמ"מ עבור כל ע.ע. ר.ג. = ר.א.

משפט:  
 הפיכה אמ"מ 0 אינו ע.ע. של .

משפט:  
ל- ול- יש אותם ע.ע.

משפט:  
תהא  מטריצה מעל שדה . נניח שכל הע.ע. של  נמצאים ב-, אז  דומה למטריצה משולשית מהצורה: .

משפט:

1. סכום ע.ע. שווה לעקבה.
2. מכפלת ע.ע. שווה לדטרמיננטה.

משפט:  
אם סכום כל השורות שווה, אז סכום זה הוא ע.ע. השייך לו.ע. .

משפט:  
ל- ול- אותו פ.א. ולכן אותם ע.ע.

מסקנה:  
אם סכום האיברים בכל עמודה (במטריצה ) הוא קבוע . אז  הוא ע.ע. של .

הצבת מטריצה וט.ל. לפולינום

הגדרה:  
 ט.ל.  מ.ו. מעל שדה .  
.  
 מטריצה ריבועית מעל .  
נגדיר:  
.  
.

משפט (קיילי המילטון):  
אם  הוא הפ.א. של מטריצה ריבועית , אז .